BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

RİYAZİYYAT

О СУЩЕСТВОВАНИИ В МАЛОМ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА. IV.

К.И.ХУДАВЕРДИЕВ[1], А.Г.АЛИЕВА[2]
[1]Бакинский Государственный Университет,
[2]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

Работа посвящена изучению вопроса существования в малом классического решения одномерной смешанной задачи с однородными граничными условиями типа Рикье для полулинейных уравнений типа Соболева вида:
$u_{txx}(t,x)-\alpha u_{xxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x))\ \ (0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi)$,
где $\alpha>0$ *- постоянная. Введено понятие классического решения рассматриваемой смешанной задачи. Классическое решение изучаемой смешанной задачи ищется в виде ряда Фурье:*

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx \quad (0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi),$$

причём, после применения метода Фурье, нахождение неизвестных коэффициентов Фурье $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ *искомого классического решения* $u(t,x)$ *сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегральных уравнений. Далее, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказана теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях* T *) классического решения рассматриваемой смешанной задачи.*

В работе изучается вопрос существования в малом классического решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{txx}(t,x)-\alpha u_{xxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x))\,(0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi), & (1)\\ u(0,x)=\varphi(x)\ \ (0\le x\le\pi), & (2)\\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0\quad (0\le t\le T), & (3)\end{cases}$$

где $\alpha>0$ - фиксированное число; $0<T<+\infty; F,\varphi$ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём под классическим решением задачи (1)-(3)

понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T]\times[0,\pi]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

§1. Вспомогательные факты

С целью исследования классического решения задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое классическое решение задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\,, \tag{4}$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t,x)\sin nx dx\ (n=1,2,...;\ t\in[0,T]). \tag{5}$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_n(t)=\varphi_n\cdot e^{-\alpha n^2 t}-\frac{2}{\pi n^2}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\text{☞}(u(\tau,x))\sin nx\cdot e^{-\alpha n^2(t-\tau)}dxd\tau$$
$$(n=1,2,...;\ t\in[0,T]), \tag{6}$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx\ \ (n=1,2,...), \tag{7}$$

$$\text{☞}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x))\ . \tag{8}$$

2. Исходя из определения классического решения задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ - любое классическое решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (6).

3. В данной работе, с целью изучения вопроса существования классического решения задачи (1)-(3), систему (6), при предположениях

$$\text{☞}(u(t,x)),\frac{\partial}{\partial x}\{\text{☞}(u(t,x))\}\in C([0,T]\times[0,\pi]),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\text{☞}(u(t,x))\}\in C([0,T];L_2(0,\pi)), \tag{9}$$

$$\text{☞}(u(t,x))\big|_{x=0}=\text{☞}(u(t,x))\big|_{x=\pi}=0\qquad \forall t\in[0,T], \tag{10}$$

после интегрирования по частям по x два раза в правой части (6), преобразуем к виду:

$$u_n(t)=\varphi_n\cdot e^{-\alpha n^2 t}+\frac{2}{\pi n^4}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\text{☞}(u(\tau,x))\}\sin nx\cdot e^{-\alpha n^2(t-\tau)}dxd\tau$$
$$(n=1,2,...;t\in[0,T]). \tag{11}$$

4. Обозначим через $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (4), рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}([0,T])$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<+\infty, \tag{12}$$

где $l\ge 0$ - целое число, $\alpha_i\ge 0\ (i=\overline{0,l}),1\le\beta_i\le 2\,(i=\overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=J_T(u)$. Известно (см.[1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,t}}\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}\quad(0\le t\le T). \tag{13}$$

5. Для функции $u(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ функцию $u_n(t)$ назовём её n-той компонентой. Пусть 💣- любое непустое множество из пространства $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$. Совокупность n-тых компонент всех функций из 💣 обозначим через 💣$_n$. Справедлива (см.[1]) следующая

Теорема 1. Для компактности множества 💣 $\subset B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого фиксированного $n\,(n=1,2,\dots)$ множество 💣$_n$ компактно в $C^{(l)}([0,T])$;

б) для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_ε, один и тот же для всех $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in$ 💣, такой, что

$$\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\varepsilon\quad\forall u\in 💣.$$

6. Очевидно, что если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^k_{2,T}$ $(k\ge 1$- целое число), то $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|_{B^{k-1}_{1,t}}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B^k_{2,t}}. \tag{14}$$

7. Пусть $u(t,x)\equiv\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B_{2,T}^5$. Тогда, пользуясь оценкой (14) для $k=5$, $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$ имеем:

$$\left|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}n^i\cdot|u_n(t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}n^i\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}n^4\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|=\|u\|_{B_{1,t}^4}\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\|u\|_{B_{2,t}^5}\quad(i=\overline{0,4}).\tag{15}$$

Из оценок (15) и структуры пространства $B_{2,T}^5$ следует, что

$$u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x)\in C\,([0,T]\times[0,\pi]).\tag{16}$$

Кроме того, очевидно, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^{\pi}u_{xxxxx}^2(t,x)dx=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot u_n(t)\right)^2\le\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\max_{0\le\tau\le t}u_n(\tau)\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdot\|u\|_{B_{2,t}^5}^2.\tag{17}$$

Отсюда, в силу структуры пространства $B_{2,T}^5$, следует, что

$$u_{xxxxx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\pi)).\tag{18}$$

8. Пусть для натурального числа k:

$$\varphi(x)\in C^{(k-1)}([0,\pi]),\varphi^{(k)}(x)\in L_2(0,\pi),\varphi^{(2s)}(0)=\varphi^{(2s)}(\pi)=0\quad\left(s=\overline{0,\left[\frac{k-1}{2}\right]}\right).\tag{19}$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечётного k) и равенством Парсевалля (для чётного k), легко доказывается, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^k\cdot\varphi_n)^2\le\frac{2}{\pi}\cdot\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\|_{L_2(0,\pi)}^2,\tag{20}$$

где числа φ_n $(n=1,2,...)$ определены соотношением (7), причём очевидно, что оценка (20) верна и при $k=0$, если $\varphi(x)\in L_2(0,\pi)$.

9. В заключение параграфа условимся всюду в этой работе считать все величины вещественными, все функции действительнозначными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.

§2. Исследование единственности классического решения задачи (1)-(3)

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_4)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^4\right)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^4$

$$|F(t,x,u_1,...,u_4)-F(t,x,\widetilde{u}_1,...,\widetilde{u}_4)|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{4}|u_i-\widetilde{u}_i|,$$

где $C_R > 0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

§3. Исследование существования в малом классического решения задачи (1)-(3)

В этом параграфе, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть

1. $\varphi(x) \in C^{(4)}([0,\pi]), \varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,\pi)$ и

   $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(\pi) = 0$.

2. $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_4), F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_4)$ $(i=\overline{0,4}), F_{\xi_i\xi_j}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_4)$

   $(i,j=\overline{0,4}) \in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^4\right)$.

3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4) = F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4) = 0 \quad \forall t\in[0,T], \xi_2,\xi_4 \in (-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом классическое решение задачи (1)-(3).

Доказательство. Для каждого фиксированного $u \in B^4_{1,T}$ определим в $B^5_{2,T}$ оператор (относительно V) $\wp_u$:

$$\wp_u(V(t,x)) = \tilde{V}(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{V}_n(t)\sin nx, \tag{21}$$

где

$$\tilde{V}_n(t) = \varphi_n \cdot e^{-\alpha n^2 t} + \frac{2}{\pi n^4}\cdot\int_0^t\int_0^\pi \Im_u(V(\tau,x))\sin nx\, e^{-\alpha n^2(t-\tau)}dxd\tau \left(n=1,2,\ldots; t\in[0,T]\right), \tag{22}$$

числа φ_n $(n=1,2,\ldots)$ определены соотношением (7),

$$\Im_u(V(t,x)) \equiv G(u(t,x)) + g(u(t,x))\cdot V_{xxxxx}(t,x), \tag{23}$$

$$g(u(t,x)) \equiv F_{\xi_4}(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x)), \tag{24}$$

$$G(u(t,x)) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\Re(u(t,x))\} - g(u(t,x))\cdot u_{xxxxx}(t,x), \tag{25}$$

где оператор $\Re$ определён соотношением (8), ξ_4 - обозначение соответствующего аргумента функции $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_4)$.

Очевидно, что

$$\forall u \in B^5_{2,T}\ \Im_u(u(t,x)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\Re(u(t,x))\}. \tag{26}$$

Из (22) получаем, что при любом фиксированном $\forall V \in B^5_{2,T}$ и $t\in[0,T]$:

$$\left\|\tilde{V}\right\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|\tilde{V}_n(\tau)\right|\right)^2 \le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi}\cdot\int_0^t\int_0^\pi\{\Im_u(V(\tau,x))\}^2 dxd\tau, \tag{27}$$

где

$$a_0 \equiv 2\sum_{n=1}^{\infty}(n^5 \cdot \varphi_n)^2 \,, \tag{28}$$

причём конечность a_0 следует из (20) для $k = 5$.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B^4_{1,T}$, в силу (27), $\forall V \in B^5_{2,T}$:

$$\left\|\mathcal{P}_u(V)\right\|^2_{B^5_{2,T}} \equiv \left\|\widetilde{V}\right\|^2_{B^5_{2,T}} \equiv \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{V}_n(t)\sin nx\right\|^2_{B^5_{2,T}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5 \cdot \max_{0\le t\le T}\left|\widetilde{V}_n(t)\right|\right)^2 \le$$

$$\le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi}\cdot\int_0^T\int_0^\pi \{\mathcal{Q}_u(V(\tau,x))\}^2\,dx\,d\tau\,. \tag{29}$$

Далее, в силу структуры пространства $B^4_{1,T}$, $\forall u \in B^4_{1,T}$ и $\tau \in [0,T]$:

$$\left\|\frac{\partial^i u(\tau,x)}{\partial x^i}\right\|_{C([0,\pi])} \le \|u\|_{B^i_{1,\tau}} \le \|u\|_{B^4_{1,\tau}} \le \|u\|_{B^4_{1,T}} \quad (i = \overline{0,4})\,. \tag{30}$$

Кроме того, при любом $V = V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)\sin nx \in B^5_{2,T}$ $\forall$ $t \in [0,T]$:

$$\int_0^\pi V^2_{xxxxx}(t,x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n^5\cdot V_n(t))^2 \le \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\max_{0\le\tau\le t}|V_n(\tau)|\right)^2 = \frac{\pi}{2}\cdot\|V\|^2_{B^5_{2,t}}\,. \tag{31}$$

Теперь, пользуясь условием 2 данной теоремы, явными выражениями $g(u(t,x))$ и $G(u(t,x))$, определёнными соотношениями (24) и (25), и оценками (30), легко получить, что $\forall u \in B^4_{1,T}$:

$$\|g(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u)\ ,\ \|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C(u)\,, \tag{32}$$

где $Q_T \equiv [0,T]\times[0,\pi]$, а $C(u) > 0$ - постоянная.

Таким образом, из (29), пользуясь оценками (32),(31) и соотношением (23), получаем, что для каждого фиксированного $u \in B^4_{1,T}$ $\forall V \in B^5_{2,T}$:

$$\left\|\mathcal{P}_u(V)\right\|^2_{B^5_{2,T}} \le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi}\cdot\int_0^T\int_0^\pi\{\mathcal{Q}_u(V(\tau,x))\}^2\,dx\,d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{4T}{\alpha}\cdot C^2(u) + \frac{2T}{\alpha}\cdot C^2(u)\cdot\|V\|^2_{B^5_{2,T}}\,. \tag{33}$$

Из (33) следует, что для любого фиксированного $u \in B^4_{1,T}$ оператор $\mathcal{F}_u$ действует в $B^5_{2,T}$, причём ограниченно.

Теперь, пользуясь соотношениями (21)-(25) и оценками (32),(31) (для $V = V_1 - V_2$), аналогично (27) получаем, что при любом фиксированном $u \in B^4_{1,T}$ $\forall V_1, V_2 \in B^5_{2,T}$:

$$\left\|\mathcal{A}_u(V_1)-\mathcal{A}_u(V_2)\right\|^2_{B^5_{2,t}} \le \frac{2}{\alpha\pi}\cdot\int_0^t\int_0^\pi\left\{\mathcal{F}_u(V_1(\tau,x))-\mathcal{F}_u(V_2(\tau,x))\right\}^2 dxd\tau \le \frac{2}{\alpha\pi}\cdot C^2(u)\cdot$$

$$\int_0^t\left\{\int_0^\pi[V_{1,xxxxx}(\tau,x)-\right.$$

$$\left.-V_{2,xxxxx}(\tau,x)]^2\,dx\right\}d\tau \le \frac{2}{\alpha\pi}\cdot C^2(u)\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^t\left\|V_1-V_2\right\|^2_{B^5_{2,\tau}}d\tau \le \frac{1}{\alpha}\cdot C^2(u)\cdot\left\|V_1-V_2\right\|^2_{B^5_{2,T}}\cdot t, \quad (34)$$

. . . .

$$\left\|\mathcal{A}^k_u(V_1)-\mathcal{A}^k_u(V_2)\right\|^2_{B^5_{2,t}} = \left\|\mathcal{A}_u(\mathcal{A}^{k-1}_u(V_1))-\mathcal{A}_u(\mathcal{A}^{k-1}_u(V_2))\right\|^2_{B^5_{2,t}} \le$$

$$\le\left\{\frac{1}{\alpha}\cdot C^2(u)\right\}^k\cdot\left\|V_1-V_2\right\|^2_{B^5_{2,T}}\cdot\frac{t^k}{k!} \le \left\{\frac{1}{\alpha}\cdot C^2(u)\right\}^k\cdot\left\|V_1-V_2\right\|^2_{B^5_{2,T}}\cdot\frac{T^k}{k!}, \quad (35)$$

где k - любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u\in B^4_{1,T}$ $\forall V_1,V_2\in B^5_{2,T}$:

$$\left\|\mathcal{A}^k_u(V_1)-\mathcal{A}^k_u(V_2)\right\|_{B^5_{2,T}} \le q_k(u)\cdot\left\|V_1-V_2\right\|_{B^5_{2,T}}, \quad (36)$$

где
$$q_k(u)\equiv\frac{1}{\sqrt{k!}}\cdot\left\{\frac{1}{\alpha}\cdot C^2(u)\cdot T\right\}^{\frac{k}{2}}. \quad (37)$$

Очевидно, что для достаточно больших $k=k_u$: $q_k(u)<1$. Для таких k оператор $\mathcal{A}^k_u$ оказывается сжатым в пространстве $B^5_{2,T}$. Тогда, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, единственная в $B^5_{2,T}$ неподвижная точка V оператора $\mathcal{A}^k_u$ является и единственной в $B^5_{2,T}$ неподвижной точкой оператора $\mathcal{A}_u$:

$$V=\mathcal{A}_u(V),\quad V\in B^5_{2,T}. \quad (38)$$

Сопоставив каждому $u\in B^4_{1,T}$ единственную в $B^5_{2,T}$ неподвижную точку V оператора $\mathcal{A}_u$ порождаем оператор H:

$$H(u)=V=\mathcal{A}_u(V), \quad (39)$$

действующий из $B^4_{1,T}$ в $B^5_{2,T}$.

Покажем непрерывность оператора H. Пусть

$$B^4_{1,T}\ni u_k(t,x)\xrightarrow{B^4_{1,T}}u_0(t,x)\in B^4_{1,T} \text{ при } k\to\infty. \quad (40)$$

Тогда, в силу (30) для $u=u_k-u_0$, очевидно, что

$$\frac{\partial^i u_k(t,x)}{\partial x^i}\xrightarrow{C(Q_T)}\frac{\partial^i u_0(t,x)}{\partial x^i} \text{ при } k\to\infty \quad (i=\overline{0,4}) \quad (41)$$

и существует такое число $R_0>0$, что $\forall k$ $(k=1,2,\ldots)$ и $t\in[0,T]$, $x\in[0,\pi]$:

$$-R_0 \le u_k(t,x), u_{k,x}(t,x), u_{k,xx}(t,x), u_{k,xxx}(t,x), u_{k,xxxx}(t,x) \le R_0 . \tag{42}$$

Следовательно

$$\|G(u_k(t,x)) - G(u_0(t,x))\|_{C(Q_T)} \equiv \varepsilon_k \to 0 \ \text{ при } k \to \infty , \tag{43}$$

$$\|g(u_k(t,x)) - g(u_0(t,x))\|_{C(Q_T)} \equiv \delta_k \to 0 \ \text{ при } k \to \infty , \tag{44}$$

$$\|g(u_k(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_0 \quad (k = 0,1,\ldots) , \tag{45}$$

где операторы G и g определены соотношениями (25) и (24), а $C_0 > 0$ - постоянная.

Примем обозначения:

$$H(u_k) = V_k \quad (V_k = \Phi_{u_k}(V_k)), \quad k = 0,1,\ldots \ . \tag{46}$$

Тогда, пользуясь соотношениями (23)-(25), (43),(44), оценкой (45) и оценкой (31) для $V = V_k - V_0$ и $V = V_0$, аналогично (34) получаем, что $\forall k$ $(k = 1,2,\ldots)$ и $t \in [0,T]$:

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \|V_k - V_0\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \|\Phi_{u_k}(V_k) - \Phi_{u_0}(V_0)\|^2_{B^5_{2,t}} \le \frac{2}{\alpha\pi} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{\Psi_{u_k}(V_k(\tau,x)) -$$

$$- \Psi_{u_0}(V_0(\tau,x))\}^2 dx d\tau \le \frac{3T}{\alpha} \left(2\varepsilon_k^2 + \delta_k^2 \cdot \|V_0\|^2_{B^5_{2,T}}\right) + \frac{3}{\alpha} \cdot C_0^2 \cdot \int_0^t \|V_k - V_0\|^2_{B^5_{2,\tau}} d\tau . \tag{47}$$

Из (47), применив неравенство Беллмана, получаем:

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|^2_{B^5_{2,T}} \equiv \|V_k - V_0\|^2_{B^5_{2,T}} \le \frac{3T}{\alpha} \left(2\varepsilon_k^2 + \delta_k^2 \cdot \|V_0\|^2_{B^5_{2,T}}\right) \cdot \exp\left\{\frac{3}{\alpha} \cdot C_0^2 \cdot T\right\}, \ k = 1,2,\ldots . \tag{48}$$

Отсюда, в силу (43) и (44), следует, что

$$H(u_k) \xrightarrow{B^5_{2,T}} H(u_0) \ \text{ при } k \to \infty . \tag{49}$$

Таким образом, оператор H действует из $B^4_{1,T}$ в $B^5_{2,T}$ непрерывно и, тем более, он действует в $B^4_{1,T}$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора H в $B^4_{1,T}$. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_R$ - любой замкнутый шар пространства $B^4_{1,T}$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда очевидно, что при любом $u \in \mathcal{K}_R$, в силу (30), $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$:

$$-R \le u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_{xxxx}(t,x) \le R . \tag{50}$$

Тогда очевидно, что

$$\forall u \in \mathcal{K}_R \quad \|g(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R \ , \ \|G(u(t,x))\|_{C(Q_T)} \le C_R , \tag{51}$$

где $C_R > 0$ - постоянная, а g и G определены соотношениями (24) и (25).

Пользуясь оценками (51), (31) и соотношениями (21)-(25), аналогично (27) получаем, что при любом $u \in \mathcal{K}_R$ $\forall t \in [0,T]$:

$$\|H(u)\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \|V\|^2_{B^5_{2,t}} \equiv \|\Phi_u(V)\|^2_{B^5_{2,t}} \le a_0 + \frac{2}{\alpha\pi} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{\Psi_u(V(\tau,x))\}^2 dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{4T}{\alpha} \cdot C_R^2 + \frac{2}{\alpha} \cdot C_R^2 \cdot \int_0^t \|V\|^2_{B^5_{2,\tau}} d\tau \,. \tag{52}$$

Из (52), применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall u \in \text{😐}_R$:

$$\|H(u)\|^2_{B^5_{2,T}} \equiv \|V\|^2_{B^5_{2,T}} \le \left(a_0 + \frac{4T}{\alpha} \cdot C_R^2 \right) \cdot \exp\left\{ \frac{2}{\alpha} \cdot C_R^2 \cdot T \right\} \equiv a_R^2 \,. \tag{53}$$

Далее, так как $\forall u \in B^4_{1,T}$ $H(u) = V \equiv \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin nx$, где $V_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots)$ равна правой части (22), то очевидно, что

$$V_n'(t) = -\alpha n^2 \cdot \varphi_n \cdot e^{-\alpha n^2 t} - \frac{2\alpha}{\pi n^2} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \aleph_u(V(\tau, x)) \sin nx \cdot e^{-\alpha n^2 (t-\tau)} dx d\tau +$$

$$+ \frac{2}{\pi n^4} \cdot \int_0^\pi \aleph_u(V(t,x)) \sin nx dx \quad (n = 1,2,\ldots;\ t \in [0,T]) \,. \tag{54}$$

Тогда очевидно, что $\forall n$ $(n = 1,2,\ldots)$ и $t \in [0,T]$:

$$|V_n'(t)| \le \alpha n^2 \cdot |\varphi_n| + \frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi n^3} \cdot \left\{ \int_0^t \left[\int_0^\pi \aleph_u(V(\tau, x)) \sin nx dx \right]^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot n^4} \cdot \left\{ \int_0^t [\aleph_u(V(t,x))]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \,. \tag{55}$$

С другой стороны, пользуясь соотношениями (23)-(25) и оценками (51), (31), (53), $\forall u \in \text{😐}_R$ и $t \in [0,T]$ имеем:

$$\int_0^\pi [\aleph_u(V(t,x))]^2 dx \le C_R^2 \cdot \int_0^\pi [1 + |V_{xxxxx}(t,x)|]^2 dx \le 2C_R^2 \cdot \int_0^\pi \left[1 + V^2_{xxxxx}(t,x)\right] dx \le$$

$$\le 2C_R^2 \cdot \left(\pi + \frac{\pi}{2} \|V\|^2_{B^5_{2,t}} \right) \le \pi C_R^2 \cdot \left(2 + \|V\|^2_{B^5_{2,T}}\right) \le \pi C_R^2 \cdot \left(2 + a_R^2\right). \tag{56}$$

Тогда, пользуясь оценкой (56), из (55) получаем, что $\forall n (n = 1,2,\ldots)$ и $t \in [0,T]$:

$$|V_n'(t)| \le \alpha n^2 \cdot |\varphi_n| + \frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi n^3} \cdot \left\{ \int_0^T \left[\int_0^\pi \aleph_u(V(\tau, x)) \sin nx dx \right]^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot n^4} \cdot \sqrt{\pi C_R^2 \cdot \left(2 + a_R^2\right)}, \tag{57}$$

следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3 \cdot \max_{0 \le t \le T} |V_n(t)| \right)^2 \le 3\alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^5 \cdot \varphi_n\right)^2 + 12 C_R^2 \cdot \left(2 + a_R^2\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{6\alpha}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^\pi \aleph_u(V(t,x)) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx dx \right\}^2 dt = 3\alpha^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^5 \cdot \varphi_n\right)^2 +$$

$$+12\left(2+a_R^2\right)\cdot C_R^2\cdot\frac{\pi^2}{6}+\frac{3\alpha}{\pi}\cdot\int_0^T\int_0^\pi\{\mathcal{F}_u(V(t,x))\}^2\,dxdt. \tag{58}$$

Отсюда, пользуясь оценкой (56), получаем:

$$\left\|(H(u))_t\right\|^2_{B^3_{2,T}}\equiv\left\|V_t\right\|^2_{B^3_{2,T}}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\cdot\max_{0\le t\le T}\left|V_n'(t)\right|\right)^2\le 3\alpha^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\varphi_n\right)^2+$$
$$+2\pi^2\left(2+a_R^2\right)\cdot C_R^2+3\alpha\cdot\left(2+a_R^2\right)\cdot C_R^2=b_R^2. \tag{59}$$

Таким образом, из оценок (53) и (59) следует, что $\forall u\in 😐_R$:

$$\left\|H(u)\right\|^2_{B^{5,3}_{2,2,T}}=\left\|H(u)\right\|_{B^5_{2,T}}+\left\|(H(u))_t\right\|_{B^3_{2,T}}\le a_R+b_R\equiv c_R. \tag{60}$$

Следовательно, множество $H(😐_R)$ ограничено в $B^{5,3}_{2,2,T}$. Отсюда следует справедливость следующих двух фактов:

а) для каждого фиксированного n $(n=1,2,\ldots)$ совокупность n-тых компонент всех элементов из $H(😐_R)$ ограничена в $C^{(1)}[0,T]$ и, следовательно, по теореме Арцела, компактна в $C([0,T])$;

б) в силу оценок

$$\sum_{n=N}^{\infty}n^4\cdot\max_{0\le t\le T}\left|V_n(t)\right|\le\left(\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\max_{0\le t\le T}\left|V_n(t)\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le a_R\cdot\left(\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_ε, один и тот же для всех $H(u)=V\equiv$ $\equiv\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)\sin nx\in H(😐_R)$, такой, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty}n^4\cdot\max_{0\le t\le T}\left|V_n(t)\right|<\varepsilon\quad\forall V\in H(😐_R),$$

где N - любое натуральное число, а a_R - число, фигурирующее в (53).

Следовательно, по теореме 1 множество $H(😐_R)$, рассматриваемое как подмножество пространства $B^4_{1,T}$, компактно в $B^4_{1,T}$. Таким образом, оператор H действует в $B^4_{1,T}$ компактно. Так как оператор H действует (как доказано выше) в $B^4_{1,T}$ и непрерывно, то он действует в $B^4_{1,T}$ вполне непрерывно. Далее, в силу оценок (14) для $k=5$ и (53), $\forall u\in 😐_R$ имеем:

$$\left\|H(u)\right\|_{B^4_{1,T}}\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\left\|H(u)\right\|_{B^5_{2,T}}\le\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot a_R=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\left(a_0+\frac{4T}{\alpha}\cdot C_R^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\cdot C_R^2\cdot T\right\}, \tag{61}$$

где числа a_0 и C_R определены соотношениями (28) и (51).

Из (61) видно, что если число

$$R>\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{a_0}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^5\cdot\varphi_n\right)^2} \tag{62}$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях T

$$\forall u \in 😐_R \quad \|H(u)\|_{B^4_{1,T}} \le R, \text{ т.е. } H(😐_R) \subset 😐_R .$$

Таким образом, для любого фиксированного R, удовлетворяющего условию (62), при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар 😐$_R$ в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в 😐$_R \subset B^4_{1,T}$ по крайней мере одну неподвижную точку u:

$$u = H(u) . \tag{63}$$

Так как $u = H(u) = V =$ 🏳$_u(V)$, то $u = V$ и, следовательно,

$$u = H(u) = 🏳_u(V) ,$$

причём, в силу (63) и (60),

$$u(t,x) \in B^{5,3}_{2,2,T} . \tag{64}$$

Далее, в силу (26),

$$ঌ_u(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{☞(u(t,x))\}$$

и, следовательно, для найденной неподвижной точки

$$u = u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B^{5,3}_{2,2,T} \tag{65}$$

функции $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$ удовлетворяют системе (11).

Очевидно, что для функции $u(t,x) \in B^5_{2,T}$, в силу условий 2,3 данной теоремы и свойств (16), (18), (3) функции $u(t,x)$, выполнены все условия (9) и (10). Поэтому функции $u_n(t)\,(n=1,2,...)$, удовлетворяющие системе (11), удовлетворяют и системе (6). Пользуясь этим, показывается, что функция $u(t,x) \in B^{5,3}_{2,2,T}$ является классическим решением задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание 1. Так как из условия 2 теоремы 3 следует выполнение всех условий теоремы 2, то при условиях теоремы 3 классическое решение задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

Замечание 2. Как видно из структуры пространства $B^{5,3}_{2,2,T}$, классическое решение $u(t,x) \in B^{5,3}_{2,2,T}$ задачи (1)-(3), найденное в процессе доказательства теоремы 3, обладает следующими дополнительными (по сравнению с определением классического решения задачи (1)-(3)) свойствами:

$$u_{xxxxx}(t,x), u_{txxx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi)) ; \tag{66}$$

$$u_{xxxx}(t,0) = u_{xxxx}(t,\pi) = 0 \quad \forall t \in [0,T] . \tag{67}$$

Замечание 3. Как видно из процесса доказательства теоремы 3 о существовании в малом классического решения задачи (1)-(3), при условиях теоремы 3 для доказательства существования и в целом классического решения задачи (1)-(3) достаточно показать, что всевозможные классические решения задачи (1)-(3), принадлежащие пространству $B^5_{2,T}$, априори ограничены в $B^5_{2,T}$.

Замечание 4. В заключение отметим, что данная работа является продолжением работ $[2]$ и $[3]$, в которых изучены вопросы существования и единственности обобщённого и почти всюду решений задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дис…докт.физ.-мат.наук, Азербайджанский Государственный Университет, Баку: 1973, 319 с.
2. Алиева А.Г. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева четвёртого порядка. I. – Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физ.-мат. наук, №2, 2008, с.62-72.
3. Алиева А.Г. О существовании в малом решения почти всюду одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева четвёртого порядка. II. Вестник Бакинского Государственного Университета, сер.физ.-мат.наук, №4, 2008, с.43-53.

BİR SİNİF DÖRDÜNCÜ TƏRTİB SOBOLEV TİPLİ YARIM-XƏTTİ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN KLASSİK HƏLLİNİN LOKAL VARLIĞI HAQQINDA. IV.

K.İ.XUDAVERDİEV. A.Q.ƏLİYEVA

XÜLASƏ

İş Sobolev tipli yarım-xətti
$u_{txx}(t,x)-\alpha u_{xxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x))\ (0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi)$
tənliyi üçün Rikye tipli bircins sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələnin klassik həllinin lokal varlığı məsələsinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur, burada $\alpha>0$-sabitdir. Baxılan qarışıq məsələnin klassik həllinə tərif verilir. Öyrənilən qarışıq məsələnin klassik həlli

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx \quad (0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi)$$

Furye sırası şəklində axtarılır. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra axtarılan $u(t,x)$ klassik həllin naməlum $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ Furye əmsallarının tapılması müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqral tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Sonra ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipini tərpənməz nöqtə haqqında Şauder prinsipilə kombinasiya etməklə baxılan qarışıq məsələnin klassik həllinin lokal varlığı (yəni T-nin kafi qədər kiçik qiymətləri üçün) haqqında teorem isbat edilir.

ON THE EXISTENCE IN SMALL FOR CLASSICAL SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A CLASS OF SEMILINEAR FOURTH ORDER EQUATIONS OF SOBOLEV TYPE. IV.

K.I.KHUDAVERDIYEV, A.G.ALIYEVA

SUMMARY

The work deals with the study of existence in small for classical solution of one dimensional mixed problem with Rique type homogenous boundary conditions for Sobolev type semilinear equations. The concept of the classical solution of the given mixed problem is introduced. The classical solution of the studied mixed problem is sought in the form of fourier series. After applying the fourier method, the find of unknown fourier coefficients of searched classical solution leads to the solution of some mathematical nonlinear integral equation system. Further, the existence in small theorem of the classical solution of the given mixed problem has found its proof by combining the generalized contracted reflection principle with Shoulder's fixed point principle.